

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Vorlesung Mathematik für Biologen, Prof. Herzel — WS 06/07 — Klausur

Aufg.	1	2	3	4	5	6	Σ_1^6
P max	6	7	8	15	7	7	50
P							

VIEL ERFOLG!

Bitte alle Antworten mit Rechenweg oder Begründung!

1. (Funktionen) [6 P]

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Markieren Sie an den Achsen die für die Funktionen wichtige Punkte, wie z.B. 0, 1 und π .

(a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos(2x) - 1$ [3 P]

(b) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ [3 P]

2. (Grenzwerte) [7 P]

Welche der folgenden Grenzwerte existieren? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder begründen Sie warum es keinen gibt.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 4x}{-4x^2}$ [2 P]

(b) $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2y^2 + 4y}{-4y^2}$ [2 P]

(c) $\lim_{z \rightarrow 2} \frac{3z^3}{2(z - 2)}$ [3 P]

3. (Komplexe Zahlen) [8 P]

Gegeben ist die komplexe Zahl $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

(a) Berechnen Sie Betrag $r_1 = |z_1|$ und Argument $\varphi_1 = \arg(z_1)$ und geben Sie z_1 in der Polarkoordinatendarstellung $z_1 = re^{i\varphi}$ an. [3 P]

(b) Berechnen Sie nun z_1^2 . [1 P]

(c) Berechnen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ wobei $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. [2 P]

(d) Zeichnen Sie $z_1, z_2, z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ in die Gaußsche Zahlenebene ein. [2 P]

Hinweis: $\tan(\pi/6) = \sqrt{1/3}, \tan(\pi/4) = 1, \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ und $\sqrt{3} \approx 1.7$.

4. (Kurvendiskussion)**[15 P]**

Betrachten Sie die Funktion (Teilaufgaben a bis d ohne Beweis)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2/2}$$

- (a) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion? [1 P]
- (b) Hat die Funktion Polstellen? Ist die Funktion stetig? [1 P]
- (c) Wieviele Nullstellen hat die Funktion? [1 P]
- (d) Wie verhält sich die Funktion für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$? [1 P]
- (e) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x)$. [3 P]
- (f) Hat die Funktion lokale Minima oder Maxima?
Wenn ja, welche Werte haben sie und wo liegen sie? [1 P]
- (g) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion. [1 P]
- (h) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung $y(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$
bis zur dritten Ordnung. [3 P]
- (i) Berechnen Sie die Nullstellen der Taylorentwicklung $y(x)$ von Aufgabenteil (h). [1 P]
- (j) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ graphisch dar.
Markieren Sie Nullstellen, Extrema, und Wendepunkte.
Zeichnen Sie auch die Taylorentwicklung $y(x)$ von Aufgabenteil (h) und (i) mit in den
Graphen ein. [2 P]

Hinweis: $\sqrt{\frac{1}{e}} \approx 0.6$.**5. (Ableitung)****[7 P]**Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die ersten Ableitungen $\frac{d}{dx}f$ der Funktionen:

- (a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ [1 P]
- (b) $f(x) = (2 + x^5) \cos(x)$ [2 P]
- (c) $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sin(2x)}$ [4 P]

6. (Iterierte Abbildung)**[7 P]**In einem Land sei die Geburtenrate pro Jahr ungefähr 8 Neugeborene auf 1000 Personen. Dem gegenüber stehen ca. 10 Sterbefälle auf 1000 Personen pro Jahr, sowie die Anzahl an einwandernden Personen k pro Jahr.

- (a) Stellen Sie eine Iterierte Gleichung der Art $x_{t+1} = f(x_t)$ für die Entwicklung der Anzahl der Einwohner x_t von Jahr zu Jahr auf! [2 P]
- (b) Skizzieren Sie den Graph von f (nur schematisch, nicht maßstabsgerecht! k frei wählbar!).
Zeichnen Sie zusätzlich die Winkelhalbierende ein! [1 P]
- (c) Welchen Fixpunkt hat die Dynamik?
Ist er stabil oder instabil? [1 P]
- (d) Skizzieren Sie die Entwicklung der Anzahl x_t der Einwohner als Funktion der Zeit für die Zuwanderung $k = 0$! [1 P]
- (e) Die momentane Anzahl der Einwohner sei $x_0 = 80000000$. Wie groß muss die Zahl der Zuwanderer k pro Jahr mindestens sein, damit die Einwohnerzahl nicht abnimmt? [2 P]