

Aufgaben aus der mündlichen Prüfung zu den Vorlesungen „Mathematik für Biophysiker I/II“

bei K.-D. Kirchberg

1

1.1

Gegeben sei die Gram'sche Matrix

$$G(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Bestimmen Sie den Rang und den Defekt der Matrix $G(f)$, sowie den Typen von f .

Erklären Sie den Trägheitssatz von Sylvester.

1.2

Gegeben sei die Matrix

$$M_V^V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob diese Matrix diagonalisierbar ist.

1.3

a) Bestimmen Sie für

$$f(x, y) = \ln(1 + \cos^2 y + 2x)$$

die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$$

2

2.1

Erklären Sie, was man unter einem Eigenwert versteht, und wie dieser berechnet wird?

Was sind die algebraische und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes?

2.2

Definieren Sie den Begriff „inverse Matrix“. Welche Kriterien gelten für die Existenz einer inversen Matrix, und welche Methoden gibt es, eine Matrix auf Invertierbarkeit zu untersuchen?

Prüfen Sie die nachfolgende Matrix auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls deren inverse Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.3

Bestimmen Sie zu der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

ein Fundamentalsystem und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

3

3.1

(Berechnung eines linearen Gleichungssystems mittels des Gauß'schen Algorithmus'. Das Gleichungssystem konnte wegen der fehlenden Erinnerung nicht mehr aufgeführt werden.)

Welche Sätze bezüglich linearer Gleichungssysteme kennen Sie? Sind alle linearen Gleichungssysteme lösbar?

3.2

Was sind Potenzreihen?

Lösen Sie die folgende Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+4^n}$$

3.3

Bilde die Ableitung der Abbildung

$$f(x, y, z) := (yz, xz, xy)$$

Ist diese Abbildung invertierbar?

Wann Sie lokal umkehrbar?

4

4.1

(Berechnung der Determinante einer Matrix mit $n=4$, möglichst mit einer Laplace-Entwicklung. Hier konnte die entsprechende Matrix wegen der fehlenden Erinnerung nicht aufgeführt werden.)

Wie ist die Determinante einer Matrix definiert? Welche Methoden können zu deren Berechnung herangezogen werden?

4.2

Bestimmen Sie zu der folgenden Matrix die kritischen Punkte, ihre Extrema, sowie die zugehörige Hesse'sche Matrix. Warum ist die Hesse'sche Matrix positiv definit?

$$f(x, y) := x^2 - xy + y^2$$

4.3

Geben Sie zu der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

die allgemeine Lösung an.

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' + y = x.$$

5

5.1

Definieren Sie den Begriff \mathbb{R} -Vektorraum und geben Sie dazu Beispiele an.
Was ist ein \mathbb{R} -Untervektorraum? Was besagt das Unterraumkriterium?

5.2

Definieren Sie „Zahlenfolge“ und „Zahlenreihe“ und geben Sie jeweils Beispiele an.

Wann ist eine Folge oder Reihe konvergent?

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 6}{2n^2 + 3n - 5}$$

und die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$$

5.3

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) := e^{\sin 2x + y}$$

und das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx$$