NAME: .... MATR.NR.: .... TUTOR: ....

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Vorlesung Mathematik für Biologen, Prof. Herz — WS 07/08 — Klausur

Aufg.	1	2	3	4	5	6	$\sum_1^6$
P max	6	7	9	12	7	9	50
P							

VIEL ERFOLG!

Bitte alle Antworten mit Rechenweg oder Begründung.

---

1. (Funktionen) **[6 P]**

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Markieren Sie an den Achsen die für die Funktionen wichtige Punkte, wie z.B. 0, 1 und π.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ [2 P]

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$ [2 P]

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = |(x-2)^2 - 1|$ [2 P]

2. (Grenzwerte) **[7 P]**

In welchen der folgenden Beispiele existiert ein endlicher Grenzwert? Berechnen Sie diesen gegebenenfalls oder begrnden Sie, warum es keinen endlichen Grenzwert gibt.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 2x}{-2x^2}$ [2 P]

(b) $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^2 + 2y}{-2y^2}$ [2 P]

(c) $\lim\limits_{z\to 3} \dfrac{3z^3}{2(z-3)}$ [2 P]

(d) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{3}{2}u^3$ [1 P]

3. (Komplexe Zahlen) **[9 P]**

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 2i$ und $z_2 = 3 + 2i$.

(a) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$. [3 P]

(b) Zeichnen Sie z_1, z_2, $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$ in die Gaußsche Zahlenebene ein. [2 P]

(c) Schreiben Sie z_1 in folgende Form um: $z_1 = r \cdot \mathrm{e}^{i\phi}$. [2 P]

(d) Berechnen Sie nun mit Hilfe der obigen Form ${z_1}^2$ und geben Sie das Ergebnis in der arithmetischen Darstellung ($z = x + iy$) an. Verwenden Sie falls nötig folgende Tabelle:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

[2 P]

$\rightarrow$

4. (Kurvendiskussion) **[12 P]**

Betrachten Sie die (reellwertige) Funktion

$$f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion. [1 P]

(b) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion? [1 P]

(c) Welche Nullstellen hat die Funktion? [1 P]

(d) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der Funktion $f(x)$. [2 P]

(e) Hat die Funktion lokale Minima oder Maxima? Wenn ja, welche Werte haben sie? [2 P]

(f) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung $y(x)$ von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung. Berechnen Sie die Nullstellen der Taylorentwicklung $y(x)$. [2 P]

(g) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ graphisch dar. Markieren Sie **Nullstellen** und **Extrema**. Zeichnen Sie die **Taylorentwicklung** $y(x)$ von Aufgabenteil (f) mit in den Graphen ein. [3 P]

5. (Integration) **[7 P]**

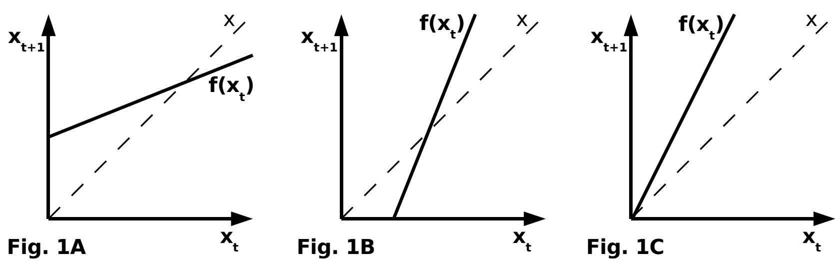
Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - 4x + 2)\, \mathrm{d}x$ [1 P] (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot x^2\, \mathrm{d}x$ [3 P]

(c) $\displaystyle\int_{ln(\frac{\pi}{4})}^{ln(\frac{3\pi}{4})} \mathrm{e}^x \cdot \cos(2\,\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x$ [3 P]

6. (Iterierte Abbildung) **[9 P]**

Betrachten Sie die 3 Abbildungen, in denen jeweils der Graph einer linearen Iterationsfunktion und die Winkelhalbierende dargestellt sind:



(a) Markieren Sie die Fixpunkte (in den 3 Abbildungen oben). Welche der entsprechenden Fixpunktlösungen sind stabil, welche instabil? [3 P]

(b) Skizzieren Sie die Entwicklung von x_t als Funktion der Zeit für alle 3 Abbildungen. Dabei sind für Fig. 1A und Fig. 1B jeweils **zwei** qualitativ verschiedene Anfangsbedingungen zu wählen und für Fig. 1C **eine** Anfangsbedingung. [3 P]

(c) Betrachten Sie nun die Iterierten Abbildungen:

$$g(x_t) = x_{t+1} = 0,7x_t + 2700$$
$$h(x_t) = x_{t+1} = 1,1x_t - 400$$

Welchem der Graphen (Fig. 1A, B oder C) lassen sich $g(x_t)$ bzw. $h(x_t)$ zuordnen? Bestimmen Sie rechnerisch die Fixpunkte für $g(x_t)$ bzw. $h(x_t)$. [3 P]