Mathematik für Biologen
Professor Kempter
Klausur am 06.02.10 WS

1.) Funktionen (6 Punkte)
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Markieren Sie an den Achsen die für die Funktionen wichtigen Punkte, wie z.B. 0, 1 und pi.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 14$ (Tipp: Mittels quadratischer Ergänzung umformen!)

b) $g(x) = ½ * e^{-x^2}$

c) $h(x) = - |\sin(x)|$

2.) Integration (8 Punkte)
Berechnen Sie folgende Integrale:

a) *(von 1 bis 2)* $\int(x^3-1/x^2)\,dx$

b) *(von -1 bis Wurzel aus 1- ?/pi)* $\int(x*\cos(1-x^2))\,dx$

c) *(von 1 bis e)* $\int(x^2*\ln(x))\,dx$

3.) Umkehrfunktion (4 Punkte)
Es sei gegeben $f(x) = e^{4(x-2)}$

a) Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich von f(x) an. Ist die Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich umkehrbar?
b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f(x).

4.) Ableitungen der Umkehrfunktion (4 Punkte)
Es sei gegeben f(x) = arcsin(x).

a) Für welche x-Werte ist f(x) definiert? Geben Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f(x) und ihre erste Ableitung (f^{-1})` an.
b) Berechnen Sie nun die erste und zweite Ableitung von f(x). (Tipp: die 1. Ableitung von f(x) lässt sich mit Hilfe der Ableitung von $f^{-1}(x)$ berechnen.)

5.) Komplexe Zahlen (7 Punkte)
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2(-1+i)$ und $z_2 = 4+2i$.

a) Zeichnen Sie z_1 und z_2 in die Gaußsche Zahlenebene ein.
b) Berechnen Sie $z_3 = z_1+z_2$, $z_4 = z_1-z_2$, $z_5 = z_1*z_2$ und $z_6 = (i^2-4)/z_1$. Geben Sie die Ergebnisse in der Form z = x + iy an.
c) Schreiben Sie z_1 in der Polarkoordinatendarstellung als $z_1 = r*e^{i\varphi}$. Ermitteln Sie dazu Betrag $r = |z_1|$ und Argument $\varphi = \arg(z_1)$.
d) Berechnen Sie nun $z_7 = (z_1)^4$. Ist z_7 komplex?

6.) Iterierte Abbildungen (6 Punkte)
In einer Population von Jamaika-Fruchtfledermäusen werden in jedem Frühjahr zwei Nachkommen pro Weibchen geboren. Das Verhältnis Männchen zu Weibchen in der

Population betrage etwa 1:1. Aufgrund einer allmählichen Verschlechterung der Habitatsqualität wandern jeden Sommer durchschnittlich 200 Individuen ab und verlassen die Population.

a) Stellen Sie eine Iterierte Abbildung der Form $x_{t+1} = f(x_t)$ für die zeitliche Entwicklung der Fledermauspopulation von Jahr zu Jahr auf.
b) Berechnen Sie den Fixpunkt und berechnen Sie seine Stabilität.
c) Skizzieren Sie den Graphen der Iterierten Abbildung und illustrieren Sie graphisch die Entwicklung der Population für zwei verschiedene Anfangswerte.
d) Skizzieren Sie die zeitliche Entwicklung für zwei qualitativ unterschiedliche Anfangsbedingungen in einer separaten Skizze.

7.) <u>Kurvendiskussion (15 Punkte)</u>
Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2/e^x$

a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion. Die Funktion e^x ist stetig. Begründen Sie, warum auch f(x) stetig ist.
b) Welche Nullstellen hat die Funktion?
c) Wie verhält sich die Funktion gegen $\pm\infty$?
d) Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von f(x).
e) Bestimmen Sie die Extrempunkte. Handelt es sich dabei um Minima oder Maxima? Geben Sie die maximalen Monotoniebereiche an.
f) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung y(x) von f(x) an der Stelle $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung.
g) Stellen Sie die Funktion f(x) graphisch dar. Markieren Sie Nullstellen und Extrema. Zeichnen Sie die Taylorentwicklung y(x) von Aufgabenteil f) mit in den Graphen ein. (Tipp: $e^2 = \sim 7{,}4$)